

# Механические колебания и волны



**Механические колебания** – периодически повторяющееся перемещение материальной точки, при котором она движется по какой-либо траектории поочередно в двух противоположных направлениях относительно положения устойчивого равновесия.

Отличительными признаками колебательного движения являются:

- повторяемость движения;
- возвратность движения.

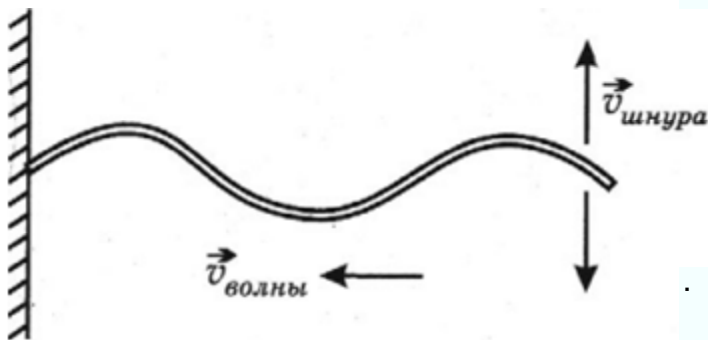
Для существования механических колебаний необходимо:

- наличие возвращающей силы – силы, стремящейся вернуть тело в положение равновесия (при малых смещениях от положения равновесия);
- наличие малого трения в системе.

*Механические волны* – это процесс распространения колебаний в упругой среде.

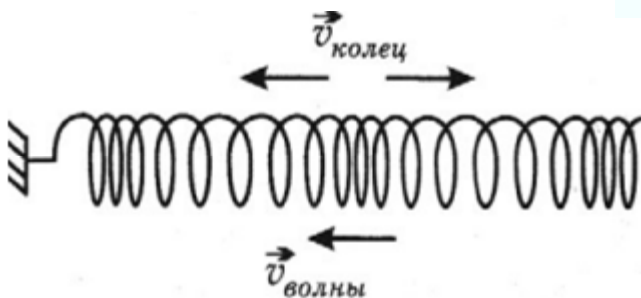
## Виды волн

- *Поперечная* – это волна, в которой колебание частиц среды происходит перпендикулярно направлению распространения волны.



Поперечная волна представляет собой чередование горбов и впадин. Поперечные волны возникают вследствие сдвига слоев среды относительно друг друга, поэтому они распространяются в твердых телах.

- *Продольная* – это волна, в которой колебание частиц среды происходит в направлении распространения волны.



Продольная волна представляет собой чередование областей уплотнения и разрежения. Продольные волны возникают из-за сжатия и разрежения среды, поэтому они могут возникать в жидких, твердых и газообразных средах.

**Важно!**

Механические волны не переносят вещество среды. Они переносят энергию, которая складывается из кинетической энергии движения частиц среды и потенциальной энергии ее упругой деформации.

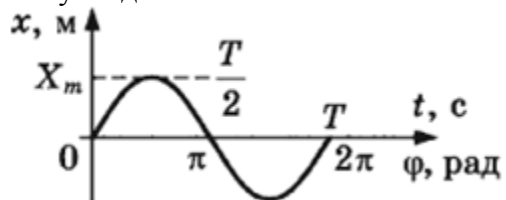
## Гармонические колебания

**Гармонические колебания** – простейшие периодические колебания, при которых координата тела меняется по закону синуса или косинуса:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0) \text{ или } x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где  $x$  – координата тела – смещение тела от положения равновесия в данный момент времени;  $A$  – амплитуда колебаний;  $\omega t + \varphi_0$  – фаза колебаний;  $\omega$  – циклическая частота;  $\varphi_0$  – начальная фаза.

Если в начальный момент времени тело проходит положение равновесия, то колебания являются синусоидальными.



Если в начальный момент времени смещение тела совпадает с максимальным отклонением от положения равновесия, то колебания являются косинусоидальными.

### Скорость гармонических колебаний

Скорость гармонических колебаний есть первая производная координаты по времени:

$$v = x',$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где  $v$  – мгновенное значение скорости, т. е. скорость в данный момент времени.

*Амплитуда скорости* – максимальное значение скорости колебаний, это величина, стоящая перед знаком синуса или косинуса:

$$v_{\max} = A\omega.$$

### Ускорение гармонических колебаний

Ускорение гармонических колебаний есть первая производная скорости по времени:

$$a = v',$$

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0), \quad a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где  $a$  – мгновенное значение ускорения, т. е. ускорение в данный момент времени.

*Амплитуда ускорения* – максимальное значение ускорения, это величина, стоящая перед знаком синуса или косинуса:

$$a_{\max} = A\omega^2.$$

Если тело совершает гармонические колебания, то сила, действующая на тело, тоже изменяется по гармоническому закону:

$$F = ma,$$

$$F = -mA\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где  $F$  – мгновенное значение силы, действующей на тело, т. е. сила в данный момент времени.

*Амплитуда силы* – максимальное значение силы, величина, стоящая перед знаком синуса или косинуса:

$$F_{\max} = mA\omega^2.$$

Тело, совершающее гармонические колебания, обладает кинетической или потенциальной энергией:

$$W_k = \frac{mv^2}{2},$$

$$W_k = \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0),$$

где  $W_k$  – мгновенное значение кинетической энергии, т. е. кинетическая энергия в данный момент времени.

*Амплитуда кинетической энергии* – максимальное значение кинетической энергии, величина, стоящая перед знаком синуса или косинуса:

$$W_{k\max} = \frac{m}{2} A^2 \omega^2.$$

При гармонических колебаниях каждую четверть периода происходит переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно.

В положении равновесия:

- потенциальная энергия равна нулю;
- кинетическая энергия максимальна.

При максимальном отклонении от положения равновесия:

- кинетическая энергия равна нулю;

потенциальная энергия максимальна.

### Полная механическая энергия гармонических колебаний

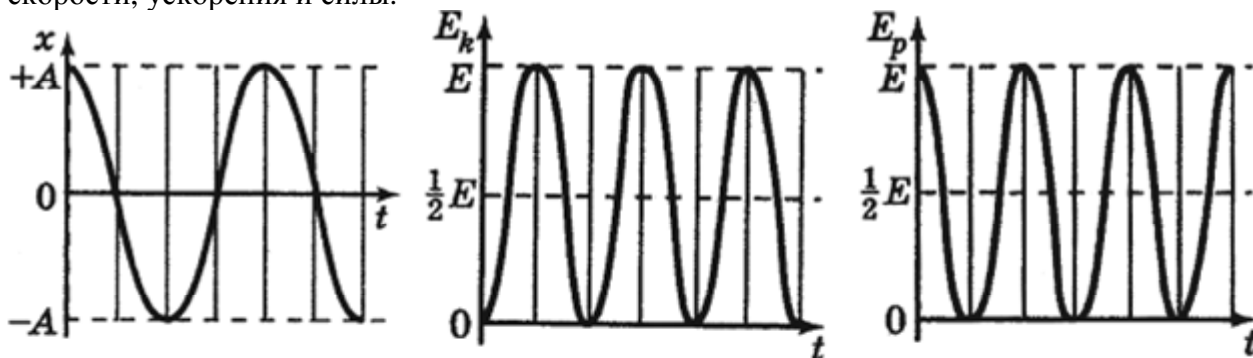
При гармонических колебаниях полная механическая энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергий в данный момент времени:

$$W_{\text{полн}} = W_{k\text{max}} = W_{p\text{max}} = W_k + W_p,$$

$$W_p = W_{\text{полн}} - W_k.$$

**Важно!**

Следует помнить, что период колебаний кинетической и потенциальной энергий в 2 раза меньше, чем период колебаний координаты, скорости, ускорения и силы. А частота колебаний кинетической и потенциальной энергий в 2 раза больше, чем частота колебаний координаты, скорости, ускорения и силы.



Графики зависимости кинетической, потенциальной и полной энергий всегда лежат выше оси времени.

Если сила сопротивления отсутствует, то полная энергия сохраняется. График зависимости полной энергии от времени есть прямая, параллельная оси времени (в отсутствие сил трения).

## Амплитуда и фаза колебаний

**Амплитуда колебаний** – модуль наибольшего смещения тела от положения равновесия. Обозначение –  $A$  ( $X_{\text{max}}$ ), единицы измерения – м.

**Фаза колебаний** – это величина, которая определяет состояние колебательной системы в любой момент времени.

Обозначение –  $\varphi$ , единицы измерения – рад (радиан).

$$\varphi = \omega t + \varphi_0.$$

Фаза колебаний – это величина, стоящая под знаком синуса или косинуса. Она показывает, какая часть периода прошла от начала колебаний.

Фаза гармонических колебаний в процессе колебаний изменяется.  $\varphi_0$  – начальная фаза колебаний.

**Начальная фаза колебаний** – величина, которая определяет положение тела в начальный момент времени.

**Важно!**

Путь, пройденный телом за одно полное колебание, равен четырем амплитудам.

### Период колебаний

**Период колебаний** – это время одного полного колебания. Обозначение –  $T$ , единицы измерения – с.

$$T = \frac{t}{N}.$$

Период гармонических колебаний – постоянная величина.

### Частота колебаний

**Частота колебаний** – это число полных колебаний в единицу времени. Обозначение –  $\nu$ , единицы времени –  $\text{с}^{-1}$  или Гц (Герц).

1 Гц – это частота такого колебательного движения, при котором за каждую секунду совершается одно полное колебание:

$$1 \Gamma \text{ц} = 1 \frac{1}{c} = 1 c^{-1}.$$

Период и частота колебаний – взаимно обратные величины:

$$T = \frac{1}{\nu}, \quad \nu = \frac{1}{T}.$$

**Циклическая частота** – это число колебаний за  $2\pi$  секунд.  
Обозначение –  $\omega$ , единицы измерения – рад/с.

$$\omega = 2\pi\nu, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

## Свободные колебания (математический и пружинный маятники)

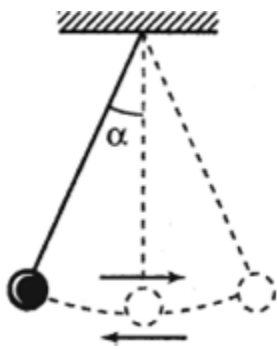
**Свободные колебания** – колебания, которые совершает тело под действием внутренних сил системы за счет начального запаса энергии после того как его вывели из положения устойчивого равновесия.

Условия возникновения свободных колебаний:

- при выведении тела из положения равновесия должна возникнуть сила, стремящаяся вернуть его в положение равновесия;
- силы трения в системе должны быть достаточно малы. При наличии сил трения свободные колебания будут затухающими.

При наличии сил трения свободные колебания будут затухающими. Затухающие колебания – это колебания, амплитуда которых с течением времени уменьшается.

**Математический маятник** – это материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити.



Период колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Частота колебаний математического маятника:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Циклическая частота колебаний математического маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Максимальное значение скорости колебаний математического маятника:

$$v_{\max} = A \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Максимальное значение ускорения колебаний математического маятника:

$$a_{\max} = A \cdot \frac{g}{l}.$$

Период свободных колебаний математического маятника, движущегося вверх с ускорением или вниз с замедлением:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+a}}.$$

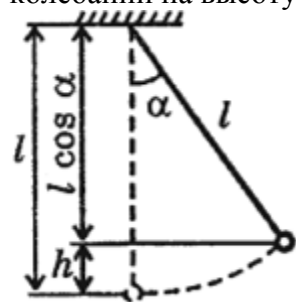
Период свободных колебаний математического маятника, движущегося вниз с ускорением или вверх с замедлением:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g-a}}.$$

Период свободных колебаний математического маятника, горизонтально с ускорением или замедлением:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g^2 + a^2}}.$$

Мгновенное значение потенциальной энергии математического маятника, поднявшегося в процессе колебаний на высоту  $h$ , определяется по формуле:



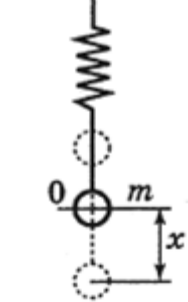
$$W_p = mgh,$$

$$h = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha),$$

где  $l$  – длина нити,  $\alpha$  – угол отклонения от вертикали.

**Пружинный маятник** – это тело, подвешенное на пружине и совершающее колебания вдоль вертикальной или горизонтальной оси под

действием силы упругости пружины.



Период колебаний пружинного маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Частота колебаний пружинного маятника:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Циклическая частота колебаний пружинного маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Максимальное значение скорости колебаний пружинного маятника:

$$v_{\max} = A \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Максимальное значение ускорения колебаний пружинного маятника:

$$a_{\max} = A \cdot \frac{k}{m}.$$

Мгновенную потенциальную энергию пружинного маятника можно найти по формуле:

$$W_p = \frac{kx^2}{2},$$

$$W_p = \frac{k}{2} A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

Амплитуда потенциальной энергии – максимальное значение потенциальной энергии, величина, стоящая перед знаком синуса или косинуса:

$$W_{p\max} = \frac{k}{2} A^2.$$

### Важно!

Если маятник не является ни пружинным, ни математическим (физический маятник), то его циклическую частоту, период и частоту колебаний по формулам, применимым к математическому и пружинному маятнику, рассчитать нельзя. В данном случае эти величины рассчитываются из формулы силы, действующей на маятник, или из формул энергий.

## Вынужденные колебания

**Вынужденные колебания** – это колебания, происходящие под действием внешней периодически изменяющейся силы.

Вынужденные колебания, происходящие под действием гармонически изменяющейся внешней силы, тоже являются гармоническими и незатухающими. Их частота равна частоте внешней силы и называется частотой вынужденных колебаний.

## Резонанс

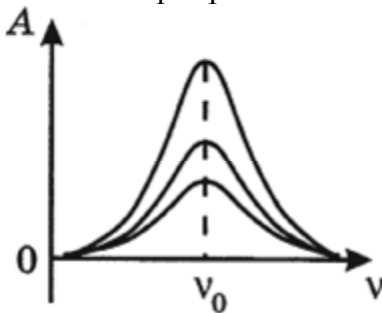
**Резонанс** – явление резкого возрастания амплитуды колебаний, которое происходит при совпадении частоты вынуждающей силы и собственной частоты колебаний тела.

Условие резонанса:

$$\omega_0 = \omega_{\text{вн.}} = \omega_{\text{рез.}} \Rightarrow A \text{ увеличивается.}$$

$\nu_0$  – собственная частота колебаний маятника.

На рисунке изображены резонансные кривые для сред с разным трением. Чем меньше трение, тем выше и острее резонансная кривая.



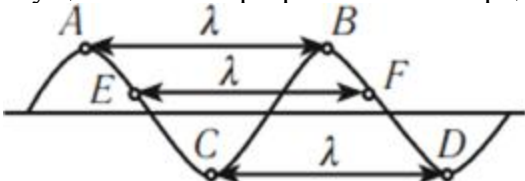
Явление резонанса учитывается при периодически изменяющихся нагрузках в машинах и различных сооружениях. Также резонанс используется в акустике, радиотехнике и т. д.

### Длина волны

**Длина волны** – это расстояние, на которое волна распространяется за один период, т. е. это кратчайшее расстояние между двумя точками среды, колеблющимися в одинаковых фазах. Обозначение –  $\lambda$ , единицы измерения – м.

$$\lambda = \nu T, \quad \lambda = \frac{\nu}{\nu}, \quad \lambda = \frac{2\pi \cdot \nu}{\omega}.$$

Расстояние между соседними гребнями или впадинами в поперечной волне и между соседними сгущениями или разрежениями в продольной волне равно длине волны.



Скорость распространения волны – это скорость перемещения горбов и впадин в поперечной волне и сгущений или разрежений в продольной волне.

## Звук

**Звук** – это колебания упругой среды, воспринимаемые органом слуха.

Условия, необходимые для возникновения и ощущения звука:

- наличие источника звука;
- наличие упругой среды между источником и приемником звука;
- наличие приемника звука; • частота колебаний должна лежать в звуковом диапазоне;
- мощность звука должна быть достаточной для восприятия.

**Звуковые волны** – это упругие волны, вызывающие у человека ощущение звука, представляющие собой зоны сжатия и разрежения, передающиеся на расстояние с течением времени.

*Классификация звуковых волн:*

- инфразвук ( $v < 16$  Гц);
- звуковой диапазон ( $16 \text{ Гц} < v < 20\,000$  Гц);
- ультразвук ( $v > 20\,000$  Гц).

*Скорость звука* – это скорость распространения фазы колебания, т. е. области сжатия и разрежения среды.

$$v = \frac{\lambda}{T}, \quad v = \lambda \nu.$$

Скорость звука зависит

- от упругих свойств среды:  
в воздухе – 331 м/с, в воде – 1400 м/с, в металле – 5000 м/с;
- от температуры среды:  
в воздухе при температуре 0°C – 331 м/с,  
в воздухе при температуре +15°C – 340 м/с.

**Характеристики звуковой волны**

- *Громкость* – это величина, характеризующая слуховые ощущения человека, зависящая от амплитуды колебаний в звуковой волне. Единицы измерения – дБ (децибел).
- *Высота тона* – это величина, характеризующая слуховые ощущения человека, зависящая от частоты колебаний в звуковой волне. Чем больше частота, тем выше звук. Чем меньше частота, тем ниже звук.
- *Тембр* – это окраска звука.

*Музыкальный звук* – это звук, издаваемый гармонически колеблющимся телом. Каждому музыкальному тону соответствует определенная длина и частота звуковой волны.

*Шум* – хаотическая смесь тонов.

## Основные формулы по теме «Механические колебания и волны»

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{– уравнение гармонических колебаний}$$

$$v = x', \quad v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{– скорость гармонических колебаний}$$

$$v_{\max} = A\omega \quad \text{– амплитуда скорости}$$

$$a = v', \quad a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{– ускорение гармонических колебаний}$$

$$a_{\max} = A\omega^2 \quad \text{– амплитуда ускорения}$$

$$W_{\text{полн}} = W_{k\max} = W_{p\max} = W_k + W_p \quad \text{– полная механическая энергия гармонических колебаний}$$

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \quad \text{– фаза колебаний}$$

$$T = \frac{t}{N}, \quad T = \frac{1}{\nu} \quad \text{– период колебаний}$$

$$\nu = \frac{N}{t}, \quad \nu = \frac{1}{T} \quad - \text{частота колебаний}$$

$$\omega = 2\pi\nu, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad - \text{циклическая частота}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad - \text{период колебаний математического маятника}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \quad - \text{частота колебаний математического маятника}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad - \text{циклическая частота колебаний математического маятника}$$

$$v_{\max} = A \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \quad - \text{максимальное значение скорости колебаний математического маятника}$$

$$a_{\max} = A \cdot \frac{g}{l} \quad - \text{максимальное значение ускорения колебаний математического маятника}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad - \text{период колебаний пружинного маятника}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad - \text{частота колебаний пружинного маятника}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad - \text{циклическая частота колебаний пружинного маятника}$$

$$v_{\max} = A \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \quad - \text{максимальное значение скорости колебаний пружинного маятника}$$

$$a_{\max} = A \cdot \frac{k}{m} \quad - \text{максимальное значение ускорения колебаний пружинного маятника}$$

$$\lambda = \nu T, \quad \lambda = \frac{\nu}{\nu}, \quad \lambda = \frac{2\pi \cdot \nu}{\omega} \quad - \text{длина волны}$$